

# Wiskundige Denk- Activiteiten in Praktijk

VELON conferentie 2015  
NRO-PPO405-14-502

Paul Drijvers  
Freudenthal Instituut  
Universiteit Utrecht  
p.drijvers@uu.nl

[www.fisme.science.uu.nl/](http://www.fisme.science.uu.nl/)  
[www.uu.nl/Staff/PHMDrijvers](http://www.uu.nl/Staff/PHMDrijvers)  
2015-03-26

[Faculteit Bètawetenschappen

**FISME** Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]



**Universiteit Utrecht**

# Aanleiding



**Universiteit Utrecht**

[Faculteit **Bètawetenschappen**

**FISME** Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]

# Waarom Wiskundige DenkActiviteiten?

Het idee van WDA is ontstaan in de Vernieuwingscommissie Wiskunde cTWO:

- Omdat wiskunde meer omvat dan procedurele kennis
- Om tegenwicht te bieden aan een te eenzijdige nadruk op 'symbol pushing' in de nieuwe curricula

[www.ctwo.nl](http://www.ctwo.nl) -> publicaties

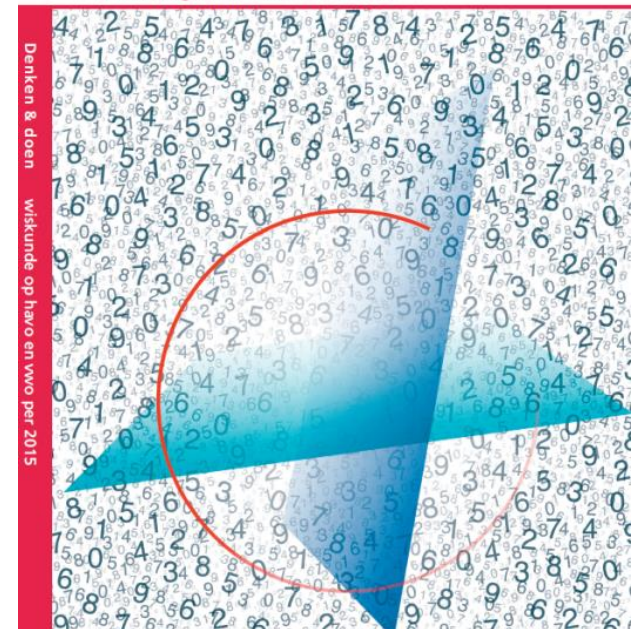


Eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO

## Denken & doen

wiskunde op havo en vwo per 2015

Vernieuwingscommissie wiskunde cTWO



# Wiskundig denken centraal doel

- George Pólya (1887 – 1985):  
... first and foremost, it should teach those young people to THINK.



# WDA volgens cTWO (2007, 2013)



Eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO

[www.ctwo.nl](http://www.ctwo.nl)

4

## Standpunt 4

Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende vaardigheden moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo-vwo lopen.

# Uitwerking in syllabi 2017(h) / 2018(v)

## **Subdomein A2**      **Profielspecifieke vaardigheden**

De kandidaat kan profielspecifieke probleemsituaties in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar het oorspronkelijke probleem terugvertalen.

De kandidaat kan

1. een probleemsituatie in een wiskundige, natuurwetenschappelijke of maatschappelijke context analyseren, gebruik makend van relevante begrippen en theorie vertalen in een vakspecifiek onderzoek, dat onderzoek uitvoeren, en uit de onderzoeksresultaten conclusies trekken;
2. een realistisch probleem in een context analyseren, inperken tot een hanteerbaar probleem, vertalen naar een wiskundig model, modeluitkomsten genereren en interpreteren en het model toetsen en beoordelen;
3. met gegevens van wiskundige en natuurwetenschappelijke aard consistente redeneringen opzetten.

## **Subdomein A3**      **Wiskundige vaardigheden**

De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende wiskundige denkactiviteiten – waaronder modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen – en kan daarbij ICT functioneel gebruiken.

# Idee WDA niet beperkt tot Nederland:

US Common core standards for mathematical practice:

1. Make sense of problems and persevere in solving them
2. Reason abstractly and quantitatively
3. Construct viable arguments and critique the reasoning of others
4. Model with mathematics
5. Use appropriate tools strategically
6. Attend to precision
7. Look for and make use of structure
8. Look for and express regularity in repeated reasoning

(<http://www.corestandards.org/Math/Practice>)



# WDA is 'in the air':

Er is veel belangstelling voor:

- Zie syllabi nieuwe curricula
- Zie nieuwe methoden
- Zie pilot examens
- NVvW –werkgroepen, lezingen, conferenties
- NRO onderzoek
- cTWO onderbouw
- Nascholing



SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling



# Beperkingen van cTWO kader

Het idee is uitstekend, maar de opsomming...

- ... is abstract, ontoegankelijk, geeft weinig richting voor docenten
- ... geeft geen criteria of ontwerprichtlijnen voor denkactieve opgaven
- ... geeft geen handvatten voor hoe denkactief wiskundeonderwijs in de klas kan worden gerealiseerd

# NRO onderzoek



**Universiteit Utrecht**

**[Faculteit Bètawetenschappen**

**FISME** Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]

# Onderzoeksvragen

NRO PPO405-14-502 Praktijkonderzoek:

1. Welke kenmerken maken een wiskundeopdracht denkactief?
2. Op welke manieren kan een wiskundedocent de denkactieve mogelijkheden van een opdracht in de les tot zijn recht laten komen?

Partners: UU (FI), Cito, Farel College, het Nieuwe Eemland, Maurick College

# Methode

De vragen worden beantwoord door

1. denkactieve opdrachten bij de reguliere schoolmethoden te ontwikkelen
2. deze in praktijk te beproeven
3. op basis van de ervaringen een handreiking te ontwerpen voor docenten die WDA in hun lespraktijk willen integreren.

# (voorlopige) resultaten



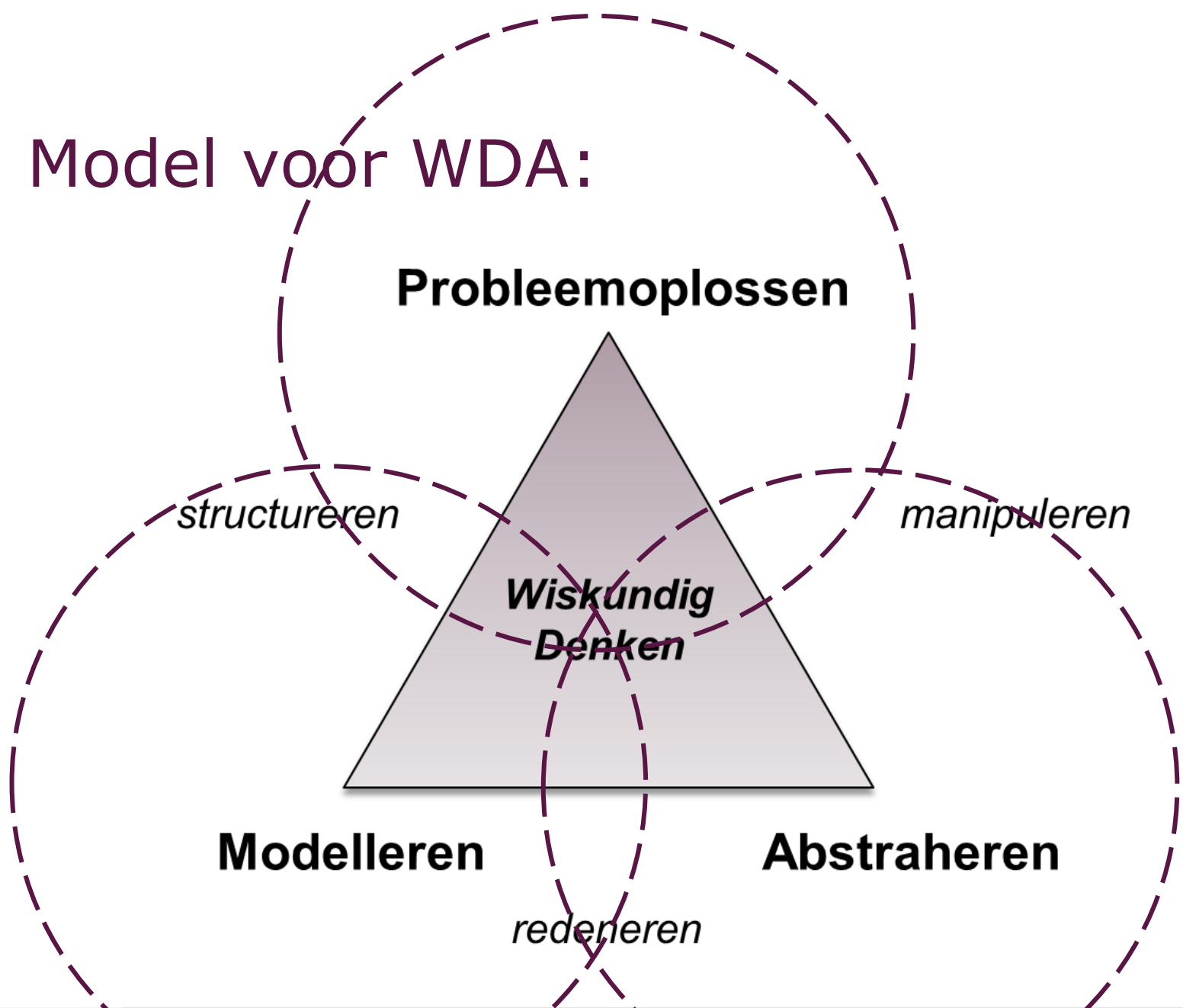
**Universiteit Utrecht**

[Faculteit **Bètawetenschappen**

**FISME** Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]



# Model voor WDA:



# Checklist denkactieve problemen

- Het is geen routineopgave, routine wordt doorbroken.
- Een plan van aanpak is niet meteen duidelijk.
- Er zit een verrassingselement in, iets nieuws.
- De opgave bevat een originele context of toepassing van een in principe bekende methode.
- De opgave vraagt om een nieuwe, inventieve methode.
- De opgave komt op een onverwacht moment.
- De opgave is niet te veel (voor)gestructureerd.
- ...



# Checklist WDA in de klas

- Geef leerlingen denktijd
- Niet te snel oordelen
- Geef geen antwoorden, maar stel (open) vragen
- Verdiep je in de gedachtegang van de leerling
- Vraag door: keer de vraag om, vraag naar randgevallen of uitzonderingen, vraag hoe de situatie of werkwijze algemeen is
- Bied strategische in plaats van technische hints
- Moedig leerlingen aan om uitleg te geven, ook aan elkaar
- ....

# WDA toetsen?

Voortoets:

- $N = 230$
- $\alpha = .55$

	Pr/Mo/Ab	P	Rir	Rit	Alpha if deleted
Item1: Formulebomen	Ab	0,54	0,25	0,55	0,522
Item2: Wegwijzer	Pr	0,20	0,37	0,57	0,473
Item3: Huisje	Mo	0,68	0,29	0,52	0,502
Item4: Handen schudden	Pr	0,55	0,18	0,49	0,522
Item5: klopt het wel?	Ab	0,38	0,29	0,56	0,499
Item6: Parkeerkosten	Mo	0,12	0,25	0,45	0,516
Item7: Rechthoekig?	Ab	0,14	0,38	0,54	0,484

# *Dank voor uw aandacht*

**VELON conferentie 2015  
NRO-PPO405-14-502**

**Paul Drijvers  
Freudenthal Instituut  
Universiteit Utrecht  
p.drijvers@uu.nl**

**[www.fisme.science.uu.nl/](http://www.fisme.science.uu.nl/)  
[www.uu.nl/Staff/PHMDrijvers](http://www.uu.nl/Staff/PHMDrijvers)  
2015-03-26**

**[Faculteit Bètawetenschappen**

**FISME** Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]



**Universiteit Utrecht**



# Wat is wiskundig denken?

*Bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken.*

- **Hoe:** welk gereedschap, in welke volgorde, onder welke voorwaarden;
- **Wiskundig gereedschap:** kan specifiek zijn (*abc*-formule), maar ook theoretisch (redeneren, bewijzen), of algemeen (probleemoplossen, modelleren, abstraheren);
- **Gebruiken:** toepassen, maar ook het ontwikkelen of op maat maken van gereedschap voor een specifiek doel;
- **Probleem:** niet-routine, binnen of buiten de school, binnen of buiten de wiskunde.
- **“Niet-routine”** is relatief!



# Wat is probleemoplossen?

- Een probleem kunnen stellen
- Een probleemaanpak kunnen bedenken
- Heuristieken kunnen gebruiken
- Een meerstapsstrategie kunnen uitvoeren en de uitvoering monitoren
- Wat je al kent en kunt flexibel kunnen inzetten (“wiskundige wendbaarheid”, een probleem naar je hand kunnen zetten)
- Cf. Pólya, 1945; Schoenfeld, 2007; Van Streun, 1989.



# Probleemoplossen

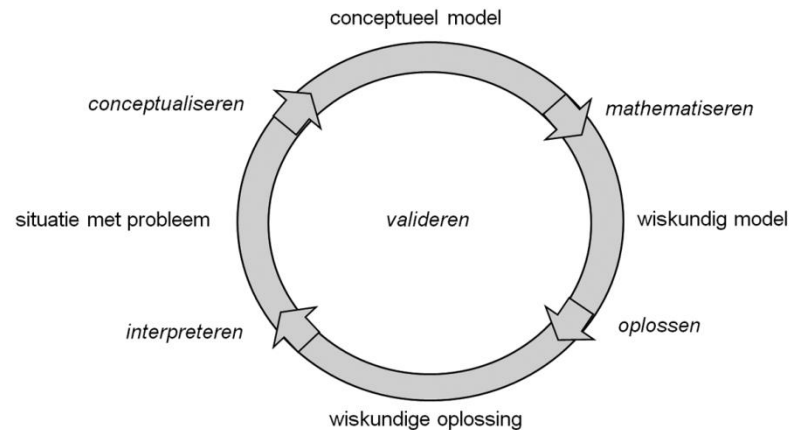
- **Problem solving** concerns solving non-routine tasks, for which students don't have a ready-made strategy available (Schoenfeld, 2007).
- Van Streun & Kop (2012, p. 348): Een opgave is voor een oplosser een probleem als deze niet onmiddellijk een oplossingsweg ziet.





# Wat is modelleren?

- cTWO: het vertalen van realistische problemen in wiskundige vorm
- Spandaw en Zwaneveld (2012): het doorlopen van de modelleercyclus





# Wat is abstraheren?

- Een wiskundig model zien als een wiskundige theorie of methode, los van de werkelijkheid, die geanalyseerd kan worden met wiskundige wetmatigheden. (Vakontwikkelgroep Wiskunde, 1995).
- In verschillende concrete probleemsituaties het onveranderlijke / de essentie zien; dat leidt tot betekenisvolle wiskundige begrippen en objecten.
- Redeneren over eigenschappen van en relaties tussen die objecten.
- Daarmee betreed je een hogere ‘wereld’ van wiskundige begrippen en redeneringen.
- Cf Relational understanding (Skemp, 1976)